



Quadratische Gleichungen • Anwendungen

Übung

1. Addiert man zum Quadrat einer Zahl 91, so erhält man 380. Bestimmen Sie die möglichen Zahlen. •••
2. Das Produkt zweier aufeinander folgender, natürlicher Zahlen ergibt 2256. Berechnen Sie die beiden Zahlen. •••
3. Das Fünffache einer Zahl ist um 300 kleiner als ihr Quadrat. Berechnen Sie die möglichen Zahlen. •••
4. In eine Standard-Coladose passen 330 ml. Die Dose ist 11,5 cm hoch. Berechnen Sie den Durchmesser der Dose. •••
5. Ein Rechteck hat die Seitenlängen 12 cm und 7 cm. Verlängert man die längere Seite um x cm und verkürzt die kürzere um denselben Wert, dann erhält das Rechteck einen Flächeninhalt von 48 cm^2 . Ermitteln Sie, wie groß x zu wählen ist. •••
6. Eine rechteckige Lagerhalle besitzt eine Grundfläche von $4\,125 \text{ m}^2$. Die Länge der Halle ist um 20 m größer als seine Breite. Berechnen Sie die Länge und die Breite der Halle. •••
7. Zum Auslegen einer rechteckigen Terrasse werden insgesamt 147 quadratische Platten benötigt, die alle eine Kantenlänge von 40 cm besitzen. Bestimmen Sie die Maße der Terrasse, wenn sie dreimal so lang ist wie breit. •••
8. Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt 130 cm^2 . Berechnen Sie die Grundseite sowie die Höhe des Dreiecks, wenn bekannt ist, dass seine Grundseite um 7 cm kleiner ist als seine Höhe. •••
9. Ein rechteckiger Garten hat eine Fläche von Fläche $1\,584 \text{ m}^2$. Berechnen Sie Länge und Breite des Gartens, wenn man einen Zaun der Länge 160 m benötigt, um ihn vollständig einzuzäunen. •••
10. Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die längere Kathete b um 9 cm länger als die kürzere Kathete a . Die Hypotenuse c ist sogar um 18 cm länger als die kurze Kathete a . Berechnen Sie die Längen der Dreiecksseiten. •••
11. Ein Betrag von 50 000 € wird zu einem festen, unbekannten Zinssatz von $p\%$ für zwei Jahre angelegt. Am Ende des zweiten Jahres ist der Betrag durch die Zinszahlungen auf 52 428,80 € angewachsen. Berechnen Sie den jährlichen Zinssatz. •••

12. Eine Abiturfahrt der Beruflichen Oberschule Kelheim kostet insgesamt 44 800 € an Reisekosten, die auf alle Schüler gleichmäßig verteilt werden. Da unerwartet acht Schüler krankheitsbedingt ausfallen, erhöhen sich die Gesamtkosten pro Schüler bei unverändertem Gesamtbetrag um 100 €. Ermitteln Sie, wie viele Personen ursprünglich an der Abiturfahrt teilnehmen wollten. Berechnen Sie auch die Kosten, die jeder Schüler tragen muss, nachdem die acht Mitschüler ausgefallen sind. •••

Quadratische Gleichungen • Anwendungen

Lösung

1. Die Gleichung $x^2 + 91 = 380$ besitzt als Lösung die Zahlen $x_{1/2} = \pm\sqrt{289} = \pm 17$.
Die möglichen Zahlen sind damit -17 und 17 .
2. Bezeichnet man mit x die kleiner der beiden Zahlen, dann ergibt sich die Gleichung $x \cdot (x + 1) = 2256$ mit den Lösungen $x_1 = 47$ und $x_2 = -48$. Da x natürlich, also positiv sein muss, kommt nur 47 in Frage. Die beiden Zahlen lauten damit 47 und 48 .
3. $5x + 300 = x^2$
 $x^2 - 5x - 300 = 0$
 $x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 1200}}{2} = \frac{5 \pm 35}{2}$
 $x_1 = -15$ und $x_2 = 20$. Die beiden Zahlen lauten -15 und 20 .
4. Alle Rechnungen sind in cm. Es ist $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$.
 r soll der Radius der zylinderförmigen Dose sein.
 $330 = r^2 \cdot \pi \cdot 11,5$
 $r = \pm \sqrt{\frac{330}{\pi \cdot 11,5}} \approx \pm 3,02 \text{ cm}$
Das negative Ergebnis mach hier keinen Sinn. Der Durchmesser der Dose beträgt den doppelten Radius und damit $6,04 \text{ cm}$.
5. $(12 + x)(7 - x) = 48$ besitzt die Lösungen $x_1 = -9$ und $x_2 = 4$.
Da nur die zweite Lösung Sinn macht, muss $x = 4$ sein.
6. Ist b die Breite der Halle, dann gilt $b \cdot (b + 20) = 4125$. Diese Gleichung besitzt die Lösungen $b_1 = -75$ und $b_2 = 55$. Davon ist nur die zweite Lösung sinnvoll. Die Lagerhalle ist 55 m breit und 75 m lang.
7. Für die Breite b der Terrasse ergibt sich $3b \cdot b = 147 \cdot 0,4 \text{ m} \cdot 0,4 \text{ m} = 23,52 \text{ m}^2$
 $b^2 = 7,84 \text{ m}^2$
 $b = 2,8 \text{ m}$.
Die Terrasse ist $2,8 \text{ m}$ breit und $8,4 \text{ m}$ lang.
Alternativ können Sie natürlich auch die Anzahl der Platten ($7 \cdot 21$) ermitteln und daraus die Abmessungen berechnen.

$$8. \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = 130 \text{ cm}^2$$

$$h = g + 7 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot (g + 7 \text{ cm}) = 130 \text{ cm}^2$$

$$g^2 + g \cdot 7 \text{ cm} - 260 \text{ cm}^2 = 0$$

$$g_{1/2} = \frac{-7 \text{ cm} \pm \sqrt{49 \text{ cm}^2 + 1\,040 \text{ cm}^2}}{2} = \frac{-7 \text{ cm} \pm 33 \text{ cm}}{2}$$

$$g_1 = -20 \text{ cm (nicht sinnvoll)} \text{ und } g_2 = 13 \text{ cm}$$

Die Grundseite des Dreiecks beträgt 13 cm und seine Höhe 20 cm.

$$9. l \cdot b = 1\,584 \text{ m}^2$$

$$2 \cdot (l + b) = 160 \text{ m, also ist } l = 80 \text{ m} - b$$

Einsetzen von l liefert $(80 \text{ m} - b) \cdot b = 1\,584 \text{ m}^2$

$$b^2 - 80 \text{ m} \cdot b + 1\,584 \text{ m}^2 = 0$$

$$b_{1/2} = \frac{80 \text{ m} \pm \sqrt{6\,400 \text{ m}^2 - 6\,336 \text{ m}^2}}{2} = \frac{80 \text{ m} \pm 8 \text{ m}}{2}$$

$$b_1 = 36 \text{ m und } b_2 = 44 \text{ m}$$

Die Länge des Grundstücks beträgt 36 m und seine Breite 44 m (oder eben umgekehrt).

$$10. a^2 + b^2 = c^2 \text{ nach Pythagoras, dabei ist } b = a + 9 \text{ und } c = a + 18.$$

$$a^2 + (a + 9)^2 = (a + 18)^2$$

Ausmultipliziert und alles auf eine Seite gebracht erhält man $a^2 - 18a - 243 = 0$ mit den Lösungen $a_1 = -9$ und $a_2 = 27$.

Da nur a_2 sinnvoll ist, gilt $a = 27 \text{ cm}$, $b = 36 \text{ cm}$ und $c = 45 \text{ cm}$.

$$11. \text{ Das zweifach verzinste Kapital berechnet sich (ohne Einheiten) mit der Formel}$$

$$50\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 52\,428,80 \text{ oder } \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1,048\,576.$$

$$\text{Wurzelziehen auf beiden Seiten ergibt } 1 + \frac{p}{100} = \pm 1,024.$$

Die negative Lösung kann wegfallen, also $p = 2,4$.

Der jährliche Zinssatz beläuft sich auf 2,4 %.

$$12. \text{ Mit } x \text{ wird die Anzahl der ursprünglichen Schüler bezeichnet, die auf die Reise gehen wollten. Dann würde jeder Schüler } \frac{44\,800}{x} \text{ € an Kosten tragen.}$$

$$(x - 8) \cdot \left(\frac{44\,800}{x} + 100\right) = 44\,800$$

$$44\,800 + 100x - \frac{358\,400}{x} - 800 = 44\,800$$

$$100x - 800 - \frac{358\,400}{x} = 0$$

$$100x^2 - 800x - 358\,400 = 0$$

$$x^2 - 8x - 3\,584 = 0$$

$$x_1 = 64; [x_2 = -56]$$

Es sollten demnach ursprünglich 64 Schüler mit auf Abifahrt gehen.

Tatsächlich zahlt dann jeder Schüler $\frac{44\,800}{64-8} \text{ €} = 800 \text{ €}$.